第４講　回転体の体積（その２）

4　次の各問いに答えよ．

(1)　２つの不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ と $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1$ の共通部分 D の体積 V_1 を求めよ．

(2)　A(2, 0, 0)，B(0, 1, 1) に対して，直線 AB を z 軸まわりに回転してできる曲面を x, y, z で表せ．また，その曲面と２つの平面 $z=0$ と $z=1$ で囲まれた部分の体積 V_2 を求めよ．

第４講　回転体の体積（その２）

4　次の各問いに答えよ.

(1)　2 つの不等式 $x^2+y^2+z^2 \leqq 4$ と $\dfrac{x^2}{4}+y^2 \leqq 1$ の共通部分 D の体積 V_1 を求めよ.

(2)　$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ 1,\ 1)$ に対して, 直線 AB を z 軸まわりに回転してできる曲面を $x,\ y,\ z$ で表せ. また, その曲面と 2 つの平面 $z=0$ と $z=1$ で囲まれた部分の体積 V_2 を求めよ.

【答】 (1)　$\dfrac{16(3\sqrt{3}+2\pi)}{9}$　　(2)　$x^2+y^2=5z^2-8z+4$, $V_2=\dfrac{5}{3}\pi$

【解説】 (1)　D を平面 $x=t$ で切ったときの断面は

$$t^2+y^2+z^2 \leqq 4 \text{ かつ } \frac{t^2}{4}+y^2 \leqq 1 \iff y^2+z^2 \leqq 4-t^2 \text{ かつ } y^2 \leqq \frac{4-t^2}{4}$$

これら 2 式を満たす実数 y と z が存在する条件は $4-t^2 \geqq 0$ かつ $\dfrac{4-t^2}{4} \geqq 0$ つまり $-2 \leqq t \leqq 2$ となり, この条件のもとで

$$y^2+z^2 \leqq 4-t^2 \text{ かつ } -\frac{\sqrt{4-t^2}}{2} \leqq y \leqq \frac{\sqrt{4-t^2}}{2}$$

とできるので, この断面積は

$$\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2\pi \times \frac{2}{6}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{4-t^2}\right)^2 \sin\frac{2}{3}\pi \times 2=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)$$

となる. よって

$$\begin{aligned} V_1 &= \int_{-2}^{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)\,dt=2\int_0^2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)(4-t^2)\,dt \\ &= 2\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)\left(4t-\frac{t^3}{3}\right)\right]_0^2=\frac{16(3\sqrt{3}+2\pi)}{9} \end{aligned}$$

(2)　直線 AB 上の点を P とすると

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OP}} &= (1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}} \\ &= (1-t)(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 1,\ 1) \\ &= (-2t+2,\ t,\ t) \quad (t \text{ は実数}) \end{aligned}$$

と表せる. ここで $\mathrm{Q}(0,\ 0,\ t)$ とおくと, 求める曲面を $z=t$ で切った断面は, 平面 $z=t$ 上で Q を中心として半径 QP の円となるので

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &= \mathrm{QP}^2 \\ &= (-2t+2)^2+t^2+0^2 \\ &= 5t^2-8t+4 \end{aligned}$$

より求める曲面を表す方程式は $x^2+y^2=5z^2-8z+4$.

ゆえに

$$\begin{aligned} V_2 &= \pi\int_0^1(5t^2-8t+4)\,dt \\ &= \pi\left[\frac{5}{3}t^3-4t^2+4t\right]_0^1 \\ &= \frac{5}{3}\pi \end{aligned}$$